ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1988

**

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION P'

(Durée de l'épreuve 4 heures)

NOTATIONS :

(1) Pour n entier positif, on note C^n l'espace vectoriel des fonctions n fois continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en particulier, C^0 désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(2) On note E^1 le sous-espace vectoriel de C^1 des fonctions qui vérifient la relation : $f(0) = 0$.

(3) Pour toute fonction f de C^0 et pour tout réel a positif, soit $M_a(f)$ le réel défini par :

$$M_a(f) = \text{Sup} \left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in [-a , +a] \right\}$$

(4) Soit u une fonction polynôme réelle, fixée une fois pour toutes, de degré $p > 1$, de terme de plus haut degré x^p et sans zéro réel.

PARTIE I

1°) (a) Si f appartient à C^0, montrer que l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x \frac{f(\lambda)}{\sqrt{u(\lambda)}}\, d\lambda$$

appartient à E^1 (donner toutes les justifications nécessaires).

Montrer que l'application T de C^0 dans E^1 définie par $Tf = F$ est linéaire.

On conserve dans toute la suite la notation T. Comme E^1 est contenu dans C^0, la restriction de T à E^1 sera encore notée T ; on note donc usuellement T^k la composée ToTo...oT, k fois, si k est entier ; en particulier, T^0 = Identité.

(b) Si f appartient à C^0, trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction $F = Tf$ (la plus simple !).

(c) Montrer que l'on a : $T(C^n) \subset C^{n+1}$ pour tout entier n.

(d) Montrer l'existence d'un réel K positif tel que :

$$\forall\ a > 0, \quad \forall\ f \in C^0, \quad M_a(Tf) \leq K\, M_a(f).$$

Indication : Considérer la fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x \frac{d\lambda}{\sqrt{u(\lambda)}}$$

Montrer que cette fonction w est bornée (on distinguera le cas où p=2 et les cas où p>2).

2°) On définit l'application D de E^1 dans C^0 de la façon suivante :
si g appartient à E^1, et x à $\mathbb{R}$, $Dg(x) = u(x)g'(x) + \frac{u'(x)}{2} g(x)$.

a) Vérifier que D est linéaire, et déterminer le noyau de D.

b) Se donnant un élément f de C^0, déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $u \cdot y' + \frac{u'}{2} \cdot y = f$

c) Après avoir montré que D est un isomorphisme de E^1 sur C^0, expliciter D^{-1}.

PARTIE II

On se propose d'expliciter les composées T^n.

1°) Soient φ un élément de C^1, Ψ un élément de C^0, n un entier ≥ 1.
Soit Φ_n la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \Big(\varphi(x) - \varphi(\lambda)\Big)^{n-1} \Psi(\lambda)\, d\lambda.$$

Montrer que Φ_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi'_{n+1}(x) = \varphi'(x)\, \Phi_n(x).$$

2°) Si f appartient à C^0 et si n est un entier (positif), on définit la fonction g_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \sqrt{u(x)} \cdot T^n f(x)$ $\Big($en particulier : $g_0(x) = \sqrt{u(x)} \cdot f(x)\Big)$.

(a) Montrer qu'il vient :

$$\forall n \geq 1, \quad g_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) g'_n(x) = g_{n-1}(x).$$

(b) Dans toute la suite, la primitive, nulle en 0, de la fonction $x \longmapsto \Big(u(x)\Big)^{-1}$ sera désignée par v. Montrer qu'il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_2(x) = \int_0^x \Big(v(x) - v(\lambda)\Big) \frac{g_0(\lambda)}{u(\lambda)}\, d\lambda.$$

(c) Plus généralement, montrer qu'il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \Big(v(x) - v(\lambda)\Big)^{n-1} \frac{g_0(\lambda)}{u(\lambda)}\, d\lambda.$$

3°) Déduire de ce qui précède une égalité explicite concernant $T^n f(x)$ ($n = 1, 2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}$) faisant intervenir une intégrale définie. En désignant par m la borne inférieure de l'ensemble $u(\mathbb{R})$, montrer tout d'abord que m est positif, puis démontrer la propriété :

$$\forall a > 0, \ \forall f \in C^0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M_a(T^n f) \leq \frac{1}{n!} \Big(\frac{a}{m}\Big)^n M_a(f).$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III

Soit à résoudre l'équation :

$$(E) \qquad f + Tf = g,$$

où g est une fonction donnée appartenant à C^0 et f une fonction inconnue qui sera supposée appartenir au moins à C^0.

1°) La fonction g est supposée dans cette question appartenir à C^1.

(a) Montrer que si f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E), f appartient à C^1 et est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle $(\mathcal{E})$.

(b) Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle $(\mathcal{E})$. On exprimera ces solutions sous forme intégrale.

(c) Déduire de ce qui précède que l'équation (E) a une solution et une seule, que l'on demande d'expliciter en faisant intervenir une intégrale définie.

2°) On revient au cas général : g est une fonction de C^0.

(a) Montrer que (E) admet au plus une solution.

(b) Montrer que la série de fonctions de terme général $(-1)^n T^n g$ converge uniformément sur tout intervalle $[-a, +a]$; $a > 0$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^n g(x).$$

Montrer que cette fonction f est continue et est solution de (E).

(c) Montrer que cette même fonction f vérifie pour tout réel x :

$$f(x) = g(x) - \frac{e^{-v(x)}}{\sqrt{u(x)}} \int_0^x e^{v(\lambda)} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{u(\lambda)}}\, d\lambda.$$

3°) Généraliser la méthode précédente pour résoudre l'équation (E') : $f + T^2 f = g$, où g est une fonction donnée appartenant à C^0 et f une fonction inconnue appartenant au moins à C^0.

4°) Applications : résoudre les équations suivantes où f est la fonction inconnue :

(a) $$f(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int_0^x \frac{f(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \operatorname{Arctg} x.$$

(b) $$f(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \int_0^x \frac{(\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} \lambda)\, f(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}\, d\lambda = R(x).$$

R est une fraction rationnelle réelle sans pôles réels ; dans ce dernier cas, on se contentera de montrer que la solution f s'exprime à l'aide de fonctions élementaires.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail